

5. Aufgabenblatt: Analysis 1

Lehrkräfteweiterbildung, 13 Q, 13 R, Sommer 2024

Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 5.1 Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert.

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^{k+2}}, \quad 2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} + (-1)^k 3^k}{5^k}, \quad 3) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + 2^k \right),$$

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Hinweis zu 4): Man berechne zuerst $\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ und gehe wie in Beisp. 3.3, 3) VL vor.

Aufgabe 5.2 Entscheiden Sie, ob folgende Reihen konvergieren oder divergieren.

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}, \quad 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + k}, \quad 3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-2}{k^3 + k},$$

$$4) 1 - \frac{3}{4} + \frac{4}{6} - \frac{5}{8} + \frac{6}{10} - \frac{7}{12} + \dots$$

Aufgabe 5.3 Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!}, \quad 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3}, \quad 3) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^k,$$

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2}, \quad 5) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}, \quad 6) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{3k}}{3^{2k}}$$

Aufgabe 5.4

1) Zeigen Sie: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine divergente Reihe, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ divergent.

2) Finden Sie eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, für die die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ divergiert.